

## Matematiikka / 2009

### Tehtävä 41

**Ratk:** Kohtien b, c ja e funktioissa esiintyy vain muuttujien  $x_1$  ja  $x_2$  ensimmäisen asteen potensseja sekä vakioita. Siis kyseiset funktiot ovat lineaarisia. **Vastaus: Osio 3.**

### Tehtävä 42

**Ratk:** Palkat ovat järjestyksessä: 500, 500, 500, 1750, 2100, 2100, 2300, 2400, 2900, 20000.  
Osio 1 / Epätosi, sillä moodi  $M_o = 500$  on yksikäsitteinen.

Osio 2 / Ratk: Aritmeettinen keskiarvo  $\bar{x} = \frac{3 \times 500 + 1750 + 2 \times 2100 + 2300 + 2400 + 2900 + 20.000}{10} = 3505$ .

Mediaani  $M_d = (2100 + 2100)/2 = 2100$ . Moodi  $M_o = 500$ . Siis **osio 2 on tosi**.

Osio 3 / Epätosi, sillä mediaani  $M_d = 2100$ .

Osio 4 / Epätosi, sillä mediaani on pienempi kuin aritmeettinen keskiarvo.

### Tehtävä 43

**Ratk:** Yksikköhinta =  $x$  (euroa) ja yksikkökustannukset = 6 (euroa). Tällöin yksikkönettotuotto =  $x - 6$  (euroa). Jos myyntimäärä =  $20 - x$ , niin nettotuottofunktio  $f(x) = (x - 6)(20 - x)$ , missä siis  $1 \leq x \leq 20$ . Siis **osio 1 on tosi**.

Edelleen  $f(x) = 20x - x^2 - 120 + 6x = -x^2 + 26x - 120$ , jolloin  $f'(x) = -2x + 26$  ja  $-2x + 26 = 0$ , kun  $x = 13$ . Koska suora  $y = -2x + 26$  on laskeva (piirrä kuvio), niin derivaatan merkki vaihtuu kohtaa  $x = 13$  ohitettaessa plussasta miinukseksi.

Piirrä tällä perusteella kulkukaavio välille  $1 \leq x \leq 20$ . Funktio  $f$  on tällöin kasvava kohtaan  $x = 13$  asti ja vähenevä kohdan 13 jälkeen. Siis nettotuottofunktio  $f(x)$  maksimoituu arvolla  $x = 13$ . Tämä merkitsee, että osiot 2–4 ovat epätosia.

### Tehtävä 44

**Ratk:** Huomaa, että annetun taulukon perusteella muuttuja  $X$  on diskreetti, eli se saa vain erilliset arvot: 0, 1, 2, 3, ..., 7, 8.

Osio 1 /  $P(2 \leq X \leq 3) = P(2) + P(3) = 0,10 + 0,10 = 0,20$  (tosi).

Osio 2 /  $P(X \geq 6) = P(6) + P(7) + P(8) = 0,10 + 0,10 + 0,05 = 0,25$  (**epätosi**).

Osio 3 /  $P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = 0,01 + 0,09 = 0,10$  (tosi).

Osio 4 /  $P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,01 + 0,09 + 0,10 = 0,20$  (tosi).

### Tehtävä 45

**Ratk:** Nyt siis  $f(x) = x^r$  ( $x > 0$  ja  $r \neq 0$ ). Funktio  $f$  on aidosti konkaavi, kun  $0 < r < 1$ .

Piirrä kuvio; vertaa kirjassa olevaan kuvioon. **Vastaus: Osio 2.**

**Huom:** Konkaavisuus voidaan selvittää myös funktion  $f$  toisen derivaatan merkin avulla.

### Tehtävä 46

Osiot 1–2 / Tosia; Näin on yleisen LP-ongelman ollessa kysymyksessä.

Osio 3 / Tosi, sillä optimiratkaisupisteet voivat muodostaa esimerkiksi janan.

Osio 4 / **Epätosi**; Käypien ratkaisujen joukon ei aina tarvitse olla rajoitettu.

### Tehtävä 47

**Ratk:** Määritetään ensin rajoitusehtojen perusteella tehtävään liittyvä käypien ratkaisujen alue.

Jos  $2x_1 + x_2 \leq 100$ , niin  $x_2 \leq -2x_1 + 100$ . Tämä pätee suoralla  $x_2 = -2x_1 + 100$  ja

tämän suoran alapuolella. Suora leikkaa koordinaattiakselit pisteissä (0,100) ja (50,0). (Jatkuu)

Jos  $x_1 + x_2 \leq 80$ , niin  $x_2 \leq -x_1 + 80$ . Tämä on voimassa suoralla  $x_2 = -x_1 + 80$  ja tämän suoran alapuolella. Suora leikkaa koordinaattiakselit pisteissä  $(0,80)$  ja  $(80,0)$ .

Suorien  $2x_1 + x_2 = 100$  ja  $x_1 + x_2 = 80$  leikkauspisteeksi saadaan vastaavasta yhtälöparista ...  $(20,60)$ . Ehto  $x_1 \leq 35$  on voimassa pystysuoralla suoralla  $x_1 = 35$  ja sen vasemmalla puolella.

Kyseisen suoran ja suoran  $x_2 = -2x_1 + 100$  leikkauspisteeksi saadaan vastaavasta yhtälöparista ...  $(35,30)$ . Piirrä tilanteesta tarkka kuvio. Käypä alue on tällöin monikulmio, jonka kärkipisteitä ovat  $O = (0,0)$ ,  $A = (35,0)$ ,  $B = (35,30)$ ,  $C = (20,60)$  ja  $D = (0,80)$ .

Toisaalta  $z = x_1 + x_2$ , joten  $x_2 = -x_1 + z$ . Nämä suorat ovat  $z$ :n vaihdellessa suoran  $x_2 = -x_1$  suuntaisia. Kun tätä suoraa nostetaan suuntansa säilyttäen käyvän alueen ylitse, suoran ja pysty akselin leikkauspiste saa suurimman arvonsa, kun suora kulkee käyvän alueen reunajanaa CD pitkin. Tämä johtuu mm. siitä, että suora  $x_2 = -x_1 + z$  ja suora  $x_2 = -x_1 + 80$  ovat yhdensuuntaiset.

Optimiratkaisuja ovat siis kaikki janan CD pisteet. Tämä merkitsee, että optimiratkaisu ei nyt ole yksikäsitteinen. Siis **osio 2 on tosi**, mutta osiot 1 ja 3 ovat epätosia.

Jos sen sijaan olisi voimassa ehto  $x_1 \geq 35$ , niin käypä alue olisi kolmio, jonka kärkipisteet ovat  $A = (35,0)$ ,  $B = (35,30)$  ja  $E = (50,0)$ . Tässä tilanteessa optimiratkaisu olisi pisteessä  $B = (35,30)$ . Tämä merkitsee, että myös osio 4 on epätosi.

#### Tehtävä 48

**Ratk:** Nyt siis kysyntäfunktio  $x = 10 - 5p = q = q(p)$ , missä  $0 < p \leq 2$ . Tällöin kysyntäfunktion  $q$  derivaatta hinnan  $p$  suhteen on  $q'(p) = -5$ . Kysynnän hintajousto saa tällöin muodon

$$\varepsilon_q(p) = \frac{p}{q} \times q'(p) = \frac{p}{10-5p} \times (-5) = \frac{-5p}{10-5p} = \frac{5p}{5p-10} = \frac{p}{p-2} \quad (\text{kun } 0 < p < 2).$$

Jos nyt  $p = 1$ , niin kysynnän hintajouaston arvo  $= \frac{1}{1-2} = -1$ . Tämä merkitsee, että

**osio 1 on tosi** (ja muut osiot ovat epätosia).